

## CORRIGÉ 1

- ①  $h : x \rightarrow e^{-x} = -u'(x)e^{u(x)}$  (où  $u(x) = -x$ ) admet comme primitive sur  $\mathbb{R}$  :

$$H : x \rightarrow -e^{u(x)} = -e^{-x}.$$

$$g : x \rightarrow -\frac{1}{x^3} \text{ admet comme primitive sur } ]0; +\infty[ :$$

$$G : x \rightarrow \frac{1}{x^2}$$

L'ensemble des solutions sur  $]0; +\infty[$  de l'équation différentielle  $y' = e^{-x} - \frac{1}{x^3}$  est donc l'ensemble des fonctions de la forme :

$$f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2x^2} + C \text{ où } C \text{ est un nombre réel quelconque.}$$

- ②  $h : x \rightarrow x^2$  admet comme primitive sur  $\mathbb{R}$  :

$$H : x \rightarrow \frac{1}{3}x^3.$$

$$g : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ admet comme primitive sur } ]0; +\infty[ :$$

$$G : x \rightarrow 2\sqrt{x}$$

L'ensemble des solutions sur  $]0; +\infty[$  de l'équation différentielle  $y' = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$  est donc l'ensemble des fonctions de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{x} + C \text{ où } C \text{ est un nombre réel quelconque.}$$

- ③  $h : x \rightarrow -2e^{6x-7} = -\frac{1}{3}u'(x)e^{u(x)}$  (où  $u(x) = 6x - 7$ ) admet comme primitive sur  $\mathbb{R}$  :

$$H : x \rightarrow -\frac{1}{3}e^{6x-7}.$$

$$g : x \rightarrow xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)} \text{ (où } u(x) = -x^2 \text{)} \text{ admet comme primitive sur } \mathbb{R} :$$

$$H : x \rightarrow -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

L'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y' = -2e^{6x-7} + xe^{-x^2}$  est donc l'ensemble des fonctions de la forme :

$$f(x) = -\frac{1}{3}e^{6x-7} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + C \text{ où } C \text{ est un nombre réel quelconque.}$$

CORRIGÉ 2 ① L'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation différentielle  $y' = x^3 + x + \frac{1}{x^2}$  est

l'ensemble des fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + C \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

$$F(1) = \frac{3}{4} \iff \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + C = \frac{3}{4} \iff C = 1$$

- ② L'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation différentielle  $y' = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^5}$  est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$F(x) = -\frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{2x^4} + C \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

$$F(-1) = 1 \iff 2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + C = 1 \iff C = -2$$

- ③ L'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $f : x \rightarrow \frac{e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^3} = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{(u(x))^3}$  (où  $u(x) = e^{2x} + 1$ ) est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{u(x)^2} + C = -\frac{1}{4(e^{2x} + 1)^2} \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

$$F(0) = -\frac{1}{16} \iff -\frac{1}{16} + C = -\frac{1}{16} \iff C = 0$$

CORRIGÉ 3 ① Soit  $(m, p) \in \mathbb{R}^2$  et  $\varphi(x) = mx + p$ .  $2\varphi'(x) + \varphi(x) = 2m + mx + p = mx + (2m + p)$ .

Donc  $\varphi$  est solution de  $2y' + y = x + 1$  si et seulement si  $m = 1$  et  $p = -1$ .

L'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $2y' + y = x + 1$  est l'ensemble des fonctions de la forme  $f : x \rightarrow \varphi(x) + v(x)$  où  $\varphi$  est la solution particulière précédemment trouvée et  $v$  est une fonction solution de  $2y' + y = 0$ , c'est-à-dire de  $y' = -\frac{1}{2}y$ , donc de la forme

$$v(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x} \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Finalement  $f(x) = x - 1 + Ce^{-\frac{1}{2}x}$  où  $C$  est un nombre réel quelconque.

② Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ .

$$\varphi'(x) - 3\varphi(x) = 2ax + b - 3(ax^2 + bx + c) = -3ax^2 + (2a - 3b)x + (b - 3c).$$

Donc  $\varphi$  est solution de  $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$  si et seulement si  $a = 1$ ,  $b = 1$ , et  $c = 1$ .

L'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$  est l'ensemble des fonctions de la forme  $f : x \rightarrow \varphi(x) + v(x)$  où  $\varphi$  est la solution particulière précédemment trouvée et  $v$  est une fonction solution de  $y' - 3y = 0$ , c'est-à-dire de  $y' = 3y$ , donc de la forme  $v(x) = Ce^{3x}$  où  $C \in \mathbb{R}$ .

Finalement  $f(x) = x^2 + x + 1 + Ce^{3x}$  où  $C$  est un nombre réel quelconque.

CORRIGÉ 4 ① On suppose que la fonction  $N$  ne s'annule pas sur  $[0; +\infty[$  et on définit sur  $[0; +\infty[$  la fonction  $g$  par  $g(t) = \frac{1}{N(t)}$ .

$$g'(t) = -\frac{N'(t)}{N(t)^2}$$

②  $N$  est solution sur  $\mathbb{R}_+$  de  $(E) \iff \forall t \in \mathbb{R}_+, N'(t) = 3N(t) - 0,005N(t)^2$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+, g'(t) = -\frac{3N(t) - 0,005N(t)^2}{N(t)^2} = -\frac{3}{N(t)} + 0,005 = -3g(t) + 0,005$$

$$\iff g \text{ est solution sur } \mathbb{R}_+ \text{ de } (E') : y' = -3y + 0,005.$$

③ L'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}_+$  de l'équation différentielle  $(E')$  est l'ensemble des fonctions de la forme  $g : t \rightarrow u(t) + v(t)$  où  $u$  est la solution particulière constante et  $v$  est une fonction solution de  $y' = -3y$ .

On trouve ainsi  $g(t) = \frac{5}{3} \times 10^{-3} + Ce^{-3t}$  où  $C \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Finalement, } N(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{\frac{5}{3} \times 10^{-3} + Ce^{-3t}} = \frac{3000}{5 + 3000Ce^{-3t}}$$

$$(a) \quad N(0) = 2000 \iff \frac{3000}{5 + 3000C} = 2000 \iff 5 + 3000C = \frac{3}{2} \iff 3000C = -\frac{7}{2}.$$

$$\text{Ainsi, } N(t) = \frac{3000}{5 - \frac{7}{2} \times e^{-3t}} = \frac{6000}{10 - 7e^{-3t}}$$

$$(b) \quad N\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{6000}{10 - 7e^{-\frac{1}{6} \times 2}} \simeq 1043 \text{ bactéries}$$